الفصل الثالث

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الإحتمالية

بعد الإنتهاء من دراسة هذا الفصل سيكون القارئ قادراً على ما يلي:

- تعريف المتغيرات العشوائية وانواعها
- توضيح مفهوم التوزيعات الإحتمالية
- توضيح بعض أنواع التوزيعات الإحتمالية المنفصلة مثل توزيع ذي الحدين وبواسون
- توضيح بعض أنواع التوزيعات الإحتمالية المتصلة مثل التوزيع الأسي والتوزيع الطبيعي
- إستخدام جداول التوزيع في إيجادالإحتمالات بناءً على جداول التوزيع الإحتمالية للتوزيع الثنائي، وبواسون ، والتوزيع الطبيعي.

مقدمة

في هذا الفصل سيتم مناقشة مفهوم المتغيرات العشوائية وانواعها وكذا مفهوم التوزيعات الإحتمالية. كما سيتم دراسة وتطبيق بعض أنواع التوزيعات الإحتمالية المنفصلة مثل التوزيع الثنائي وتوزيع بواسون ، وبعض التوزيعات الإحتمالية المتصلة مثل التوزيع الأسي والتوزيع الطبيعي. كما سيتم التركيز على إستخدام جداول التوزيع المختلفة لتلك التوزيعات.

المتغيرات العشوائية Random Variables

المتغير العشوائي هو متغير قيمته غير معروفة أو عبارة عن دالة تعين قيما لكل نتيجة من نتائج التجربة. غالبا ما يتم تعيين المتغيرات العشوائية بواسطة الحروف ويمكن تصنيفها على أنها إما متغيرات منفصلة، وهي متغيرات لها قيم محددة، أو متغيرات مستمرة، وهي متغيرات يمكن أن يكون لها أي قيم داخل نطاق مستمر.

غالبا ما تستخدم المتغيرات العشوائية في تحليل الاقتصاد القياسي أو تحليل الانحدار لتحديد العلاقات الإحصائية بين المتغيرات.

في الاحتمالات والإحصاءات، يتم استخدام المتغيرات العشوائية لتحديد نتائج تجربة عشوائية، وبالتالي، يمكن أن تأخذ العديد من القيم. يجب أن تكون المتغيرات العشوائية قابلة للقياس وعادةً ما تكون أرقاما حقيقية.

على سبيل المثال، قد يتم تحديد الحرف X لتمثيل المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع الأرقام الناتجة عن إلقاء ثلاثة من أحجار النرد المتوازنة. في هذه الحالة، يمكن أن تكون قيمة المتغير X هي (3) إذا ظهر الرقم 1 على كل الأحجار، او تكون قيمة المتغير X هي (18) إذا ظهر الرقم 6 على كل الأحجار، أو تكون قيمة المتغير X أي عدد بين 3 و18، حيث أن أكبر رقم على وجه حجر النرد هو 6 وأصغرها هو 1.

يختلف المتغير العشوائي Random Variable عن المتغير الجبري Algebraic Variable. المتغير في المعادلة الجبرية هو قيمة غير معروفة يمكن حسابها. فمثلا توضح المعادلة $10 + 15 = X$ أنه يمكننا حساب القيمة المحددة ل X وهي 25. من ناحية أخرى، يحتوي المتغير العشوائي على مجموعة من القيم، ويمكن أن تكون أي من هذه القيم هي النتيجة المتحققة فعلياً كما تم التوضيح في مثال النرد أعلاه.

أنواع المتغيرات العشوائية Types of Random Variable

يمكن أن يكون المتغير العشوائي إما منفصلاً أو مستمراً.

1. المتغيرات العشوائية المنفصلة Discrete Random Variables

تأخذ المتغيرات العشوائية المنفصلة عددا قابلا للعد من القيم المختلفة. ففي تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات. إذا كان X يمثل عدد المرات التي تظهر فيها الصورة على العملة، فإن X هو متغير عشوائي منفصل يمكن أن يحتوي فقط على القيم 0 و 1 و 2 و 3 (من عدم ظهور صور في الرميات الثلاث الى ظهور 3 صور في الرميات الثلاث. لا توجد قيمة أخرى ممكنة للمتغير العشوائي X.

يُعتبر المتغير العشوائي متغيراً عشوائياً منفصلاً إذا كان يأخذ فقط مجموعة محددة ونهائية من القيم. فمثلاً يمكن القول أن المتغير المتلق بعدد الأشجار المباعة في مشتل زراعي في يوم واحد، وعدد المرضى المعالجين في مستشفى في يوم واحد أو أسبوع ، وعدد الإيميلات المرسلة من شخص في يوم واحد هي أمثلة لمتغيرات عشوائية منفصلة. يمكن الافتراض أن كل من تلك المتغيرات العشوائية هو مجموعة من القيم المحدودة والنهائية فقط.

2. المتغيرات العشوائية المتصلة Continuous Random Variables

يمكن للمتغيرات العشوائية المستمرة أن تمثل أي قيمة ضمن نطاق محدد ويمكن أن تأخذ عددا لا نهائيا من القيم الممكنة. على سبيل المثال في تجربة قياس كمية الأمطار في مدينة على مدى عام أو متوسط ارتفاع مجموعة عشوائية من 25 شخصاً.

ويمكن للمتغير العشوائي المتصل ان يأخذ مجموعة من القيم الغير محدودة واللانهائية. فمثلاً، المتغير العشوائي X المرتبط بعمر المصباح الكهربائي يمكن وصفه بانه متغير عشوائي متصل. في هذه الحالة، المتغير العشوائيX هو الوقت الذي يستغرقه المصباح حتى يحترق والذي يمكن أن يأخذ أي قيمة بين 0 و 80,000 دقيقة (أقصى عمر إفتراضي للمصباح). ويمكن كتابة ذلك كما يلي $0 \le X \le 80,000$.

التوزيع الاحتمالي Probability Distribution

التوزيع الاحتمالي هو دالة إحصائية تصف جميع القيم المحتملة لمتغير عشوائي ضمن نطاق معين والاحتمالات لكل قيمة من تلك القيم. يتم تقييد هذا النطاق بين الحد الأدنى والحد الأقصى للقيم

الممكنة ، ولكن على وجه التحديد حيث من المحتمل أن يتم رسم القيمة المحتملة على توزيع الاحتمالات يعتمد على عدد من العوامل. تتضمن هذه العوامل متوسط التوزيع (المتوسط) والانحراف المعياري والانحراف والتفرطح.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

إذا كان لدينا المتغير العشوائي X والذي يأخذ القيم X_1 و X_2 و .... وX_n ولها الإحتمالات التالية p_1 و p_2 و .....و p_n على التوالي والتي يمكن وضعها في الجدول التالي

X	X_1	X_2	....	X_n
p	p_1	p_2	....	p_n

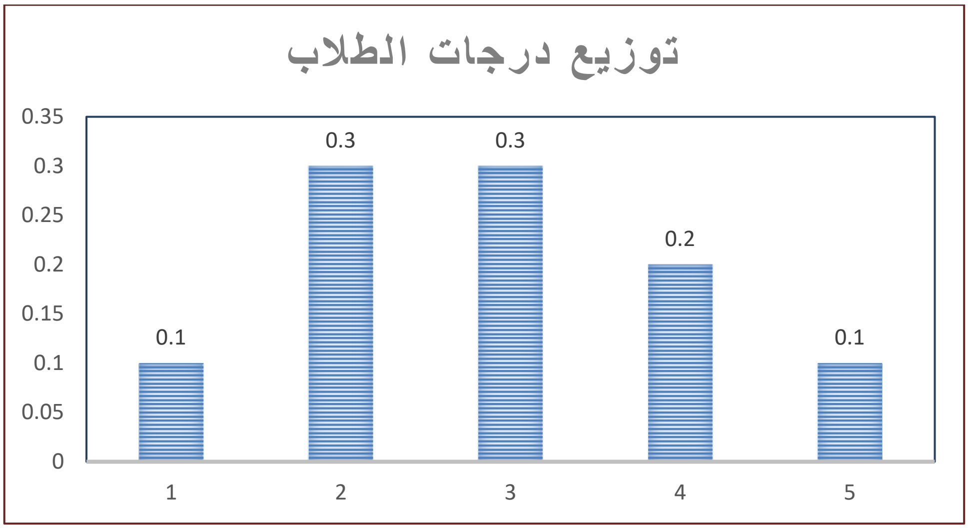
فيمكن القول أن هذا التوزيع توزيعاً إحتمالياً إذا تحقق الشرطان التاليان

1. كل الإحتمالات هي قيم موجبة بين الصفر والواحد $0 \le p_i \le 1$ لكل قيم i بين 1 و n.
2. مجموع كل الإحتمالات هو الواحد الصحيح $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

مثال 1

لنفرض أن المتغير العشوائي X هو درجة الطلاب في إمتحان قصير في مادة الطرق الكمية ويحمل 5 درجات مقابل 5 مسائل. الدرجات نظرياً تتراوح ما بين 1-5. الجدول التالي يوضح توزيع الدرجات (توزيع المتغير المنفصل) بناءً على طريقة التكرار النسبي.

الدرجة X	1	2	3	4	5
التكرار (عدد الطلاب)	10	30	30	20	10
التكرارا النسبي	10/100	30/100	30/100	20/100	10/100
الإحتمالات p	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1



يقدم لنا الرسم البياني لتوزيع الاحتمالات صورة يمكن ان تساعدنا على تحديد الاتجاه المركزي لهذا التوزيع والمسمى بالقيمة المتوقعة أو إنتشار التوزيع والمسمى بالتباين.

القيمة المتوقعة للتوزيع الاحتمالي المنفصل

Expected Value of Discrete Probability Distribution

القيمة المتوقعة للتوزيع المنفصل هو المتوسط المرجح لقيم المتغير العشوائي. والتي تمثل التوجه المركزي للتوزيع ويتم حسابها بالصيغة التالية

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \, p(X_I)$$

$$E(X) = X_1 \, p(X_1) + X_2 \, p(X_2) + \cdots + X_n \, p(X_n)$$

حيث: -

X_i = القيم المحتملة للمتغير العشوائي

$p(X_i)$ = احتمالية القيمة X_i للمتغير العشوائي

$\sum$ = الإشارة المتعلقة بالمجموع التي توضح أننا نضيف كافة القيم الممكنة.

E(X) = القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي

يمكن حساب القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي من خلال تجميع حاصل ضرب القيم الممكنة للمتغير العشوائي X_i في الاحتمالية الخاصة بكل قيمة p(Xi).

في المثال 1، يمكن إيجاد القيمة المتوقعة لدرجات الطلاب في مادة الطرق الكمية كما يلي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} X_i \, p(X_I)$$

$$E(X) = X_1 \, p(X_1) + X_2 \, p(X_2) + X_3 \, p(X_3) + X_4 \, p(X_4) + X_5 \, p(X_5)$$

$$E(X) = 1 * \ 0.1 + 2 * 0.3 + 3 * 0.3 + 4 * 0.2 + 5 * 0.1 = 2.9$$

كما في الجدول التالي

الدرجة X	الإحتمالات p	Xp(X)
1	0.1	0.1
2	0.3	0.6
3	0.3	0.9
4	0.2	0.8
5	0.1	0.5
	E(X)=	2.9

التباين والإنحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي المنفصل

Variance and Standard Deviation of the Discrete Probability Distribution

بالإضافة إلى مقياس النزعة المركزية والمتمثل في القيمة المتوقعة (المتوسط) μ ، يهتم كثير من الباحثين بتباين التوزيع أو انتشار التوزيع. إذا كان التباين منخفضاً ، فمن المرجح أن تكون نتيجة التجربة قريبة من المتوسط القيمة أوالقيمة المتوقعة. من ناحية أخرى، إذا كان تباين التوزيع مرتفعاً ، فيعني أن الاحتمال موزع على مختلف القيم العشوائية الممكنة للمتغير ، فهناك فرصة أقل لأن تكون نتيجة التجربة قريبة من القيمة المتوقعة. وعليه تباين التوزيع الاحتمالي هو عدد يعبر عن الانتشار الكلي أو التشتت في التوزيع. ويتم حساب التباين والإنحراف المعياري بالصيغة التالية:

$$\mathrm{V(X)} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X))^2 \, p(X_i)$$

$$\text{Or} \quad V(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \, p(X_i) - \left(E(X)\right)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

والإنحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين

$$\delta = \sqrt{V(X)}$$

ويمكن حساب التباين والإنحراف المعياري في المثال 1 كما في الجدول التالي

X الدرجة	الإحتمالات p	Xp(X)	(X-E(X))^2	(X-E(X))^2*p(X)	
1	0.1	0.1	3.61	0.361	
2	0.3	0.6	0.81	0.243	
3	0.3	0.9	0.01	0.003	
4	0.2	0.8	1.21	0.242	
5	0.1	0.5	4.41	0.441	
	القيمة المتوقعة E(X)=	2.9		1.290	**التباين** Variance
				1.136	**الإنحراف المعياري** Standard Deviation

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

Probability Distribution Function of the Continuous Random Variable (Probability Density Function)

هناك العديد من الأمثلة على المتغيرات العشوائية المستمرة. فمثلاً الوقت الذي يستغرقه الانتهاء من المشروع، وعدد الأوقية في برميل من الزبدة، ودرجة الحرارة العالية خلال يوم معين ، والطول الدقيق لنوع معين من الخشب ، ووزن عربة سكة حديد من الفحم كلها أمثلة على المتغيرات العشوائية الدائمة.

نظرا لأن المتغيرات العشوائية يمكن أن تأخذ عددا لا حصر له من القيم، يجب تعديل قواعد الاحتمال الأساسية للمتغيرات العشوائية المستمرة. كما هو الحال مع التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، يجب أن يساوي مجموع القيم الاحتمالية 1.

مع التوزيع الاحتمالي المستمر، هناك دالة رياضية مستمرة تصف التوزيع الاحتمالي، تسمى هذه الدالة دالة الكثافة الاحتمالية. وعادة ما يتم تمثيلها بواسطة f(X). عند العمل مع التوزيعات الاحتمالية المستمرة، يمكن رسم دالة الكثافة الاحتمالية بيانياً، ويكون الاحتمال هو المساحة الموجودة أسفل المنحنى ضمن نطاق الاهتمام. لذلك، فإن إحتمالية قيمة واحدة للمتغير العشوائي المتصل X ستكون مساوية للصفر.

القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المنفصل

Expected Value of the Continuous Random Variable

إذا كان X متغيرا عشوائيا مستمرا مع دالة كثافة إحتمالية f(X)، فإن القيمة المتوقعة (أو المتوسط) للمتغير X تُعطى بواسطة

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

التباين والإنحراف المعياري للمتغير العشوائي المنفصل

Variance and Standard Deviation of the Continuous Random Variable

ليكن X أي متغير عشوائي متصل وله متوسط μ فيكون التباين للمتغير X كما في العلاقة التالية

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \ f(x)dx\right) - \mu^2$$

ويكون الإنحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

مثال 2

إذا كان المتغير العشوائي Xيشير إلى الوقت الذي ينتظر فيه الشخص وصول المصعد. لنفترض أن أطول وقت لإنتظار المصعد هو دقيقتان، بحيث يتم إعطاء القيم المحتملة ل X (بالدقائق) من خلال الفترة التالية [0,2]. دالة الكثافة الإحتمالية تُعطي بواسطة

$$f(X) = \begin{cases} x \ \ , & for\ 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & for\ 1 < x \le 2 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

أوجد ما يلي:

A. القيمة المتوقعة للمتغير X

B. التباين والإنحراف المعياري للمتغير X

الحل

A. التوقع للمتغير X يمكن إيجاده بالعلاقة

$$E(X) = \int_0^1 x.x\ dx + \int_1^2 (2-x).x\ dx$$

$$E(X) = \int_0^1 x^2\ dx + \int_1^2 (2x - x^2)\ dx$$

$$E(X) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^2}{2}\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$E(X) = \frac{1}{3} + (4-1) - \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = 1$$

B. لحساب التباين نقوم بحساب

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2.x\ dx + \int_1^2 (2-x).x^2\ dx$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^3 . dx + \int_1^2 2x^2 dx - \int_1^2 x^3 . dx$$
$$E(X^2) = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3}\right]_1^2 - \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2$$
$$E(X^2) = \frac{1}{4} + \left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) = 1.17$$

نقوم بالتعويض لإيجاد التباين في العلاقة التالية

$$\mathrm{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$
$$\mathrm{V(X) = 1.167 - 1 = 0.167}$$

ويكون الإنحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{0.167} = 0.408$$

بعض أنواع التوزيعات الإحتمالية المتقطعة

Some Discrete Probability Distributions

أولاً: توزيع برنولي Bernoulli Distribution

توزيع برنولي هو توزيع احتمالي منفصل يختص بالمتغيرات العشوائية المنفصلة. وينطبق توزيع برنولي على الأحداث التي لها تجربة واحدة ونتيجتان محتملتان فقط هما النجاح أو الفشل.

هناك مجموعة من الخصائص لتجربة برنولي منها ما يلي:

1. هناك نتيجتان محتملتان فقط لكل تجربة . فيمكن أن تكون النتيجة نجاحاً أو فشلاً، نعم أو لا، صورةً او كتابة، جيدة أو سيئة ، وما إلى ذلك.
2. يظل احتمال النتائج ثابتاً بمرور الوقت. وبعبارة أخرى ، فإن احتمال الحصول على صورة على رمي عملة معدنية يظل هو نفسه بغض النظر عن عدد مرات القذف.
3. نتائج التجارب مستقلة. فحقيقة حصولنا على صورة في الرمية الأولى لقطعة النقود لا يؤثر على الاحتمالات في الرمية التالية.
4. عدد المحاولات هو عدد صحيح ومنتهي. فعادة ما يكون عدد التجارب صحيحاً - على سبيل المثال ، سيارة واحدة أو شخصين بدلا من 1.34 سيارة أو 2.51 شخص. ونقول أنه تم رمي العملة النقدية مرة او مرتان أو 3 مرات أو 4مرات ولا نقول 3.36 مرة.

هناك أمثلة كثيرة على تجارب برنولي منها ما يلي:

- تجربة إلقاء قطعة نقود متوازنة مرة واحدة فقط حيث يكون لدينا نتيجتان محتملتان. "الصورة H" و " الكتابة T" ، فالحصول على "الصورة يُعتبر نجاحًا والحصول على "الكتابة " يُعتبر فشلاً.
- تجربة تقديم الطالب لإمتحان عشوائي؟ نظرًا لأن الاختبار يتم إجراؤه مرة واحدة فقط ، وله نتيجتان محتملتان إما نجاح الطالب أو فشله.

في جميع تجارب برنولي، يمكن التفكير في النتيجتين المحتملتين إما "النجاح" أو "الفشل."
ويمكن القول إن نتيجة التجربة يمكن ان تكون نجاحاً (1) بإحتمالية p ويمكن ان تكون فشلاً (0) بإحتمالية (1-p=q).

ويمكن كتابة دالة الكثافة الإحتمالية للمتغير X الذي يتبع برنولي كما يلي

$$p(X) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0 \; or \; 1$$

ويمكن كتابتها كما يلي

$$p(X) = \begin{cases} p\,, & if \; x = 1 \\ 1-p \; or \; q, & if \; x = 0 \end{cases}$$

ويكون التوقع للمتغير X الذي يتبع توزيع برنولي كما يلي

$$\boldsymbol{E(X)} = p * \; 1 + (1-p) * 0 = \boldsymbol{p} = \; \boldsymbol{\mu}$$

ويكون التباين والإنحراف المعياري كما يلي

$$\boldsymbol{V(X)} = E(X^2) - \mu^2$$

$$\boldsymbol{V(X)} = p - p^2 = p(1-p) = \boldsymbol{pq}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\boldsymbol{pq}}$$

ثانياً: التوزيع ذي الحدين Binomial Distribution

يرتبط التوزيع الثنائي أو توزيع "ذو الحدين" ارتباطا وثيقاً بتوزيع برنولي. فإذا كانت كل تجربة برنولي مستقلة، فإن عدد معيناً من النجاحات في عدد n محاولة من تجارب برنولي سيتبع التوزيع الثنائي أو توزيع ذي الحدين.

يتم استخدام التوزيع ذي الحدين لإيجاد احتمال الحصول على عدد معين من النجاحات من عدد n من التجارب المستقلة التي تتبع تجربة برنولي. لإيجاد هذا الاحتمال، فمن الضروري معرفة ما يلي:

n= عدد التجارب

p= احتمال النجاح في أي محاولة

r= عدد النجاحات

q= 1-p احتمال الفشل

دالة الكثافة الإحتمالية pdf للمتغير X الذي يتبع التوزيع الثنائي والذي يُرمز له بالرمز $X\sim Bin(n,p)$ تُعطى بالعلاقة التالية

$$p(X=r)=\binom{n}{r}p^r\ (1-p)^{n-r}, r=0,1,\dots,n$$

$$p(X=r)=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}p^r\ (1-p)^{n-r}, r=0,1,\dots,n$$

حيث يُطلق على $n!$ مضروب n ويمكن حساب بالصيغة التالية

$$n!=n*(n-1)*(n-2)*\dots.*3*2*1 \quad (4!=4*3*2*1=24)$$

ويمكن بمعلومية عدد المحاولات n وإحتمالية النجاح p تحديد الإحتمالية المطلوبة من جداول التوزيع الثنائي لأي عدد محاولات مطلوب x.

وتكون دالة التوزيع الإحتمالي هي

$$p(X\le x)=\sum_{r=0}^{x}p^r\ (1-p)^{n-r}$$

و يكون التوقع للمتغير X الذي يتبع التوزيع الثنائي كما يلي

$$\boldsymbol{E(X)}=\sum_x x\,p(x)=\sum_x x\ \binom{n}{x}p^r\ (1-p)^{n-x}=\mathbf{np}$$

ويكون التباين والإنحراف المعياري كما يلي

$$\boldsymbol{V(X)}=E(X^2)-\mu^2$$

$$\boldsymbol{V(X)=npq}$$

$$\boldsymbol{\sigma=\sqrt{npq}}$$

مثال 3

تقوم شركة الصناعات الكهربائية بإنتاج رقائق دقيقة. يتم فحص الرقائق الدقيقة في نهاية عملية الإنتاج في محطة ضبط الجودة. من بين كل دفعة من الرقائق الدقيقة، يتم اختيار أربعة منها عشوائيا واختبارها بحثاً عن العيوب. بالنظر إلى أن 20٪ من جميع الرقائق معيبة، قم بإستخدام جداول التوزيع الثنائي لإيجاد الإحتمالات التالية:

A. إحتمال أن يكون هناك ثلاث رقائق معيبة على الأغلب؟

B. إحتمال ان يكون هناك ثلاث رقائق معيبة بالضبط؟

C. إحتمال أن يكون هناك رقيقتان معيبتان على الأقل؟

الحل

بناءً على معطيات السؤال نجد أن

n=4 و p=0.2

ونقوم بإيجاد الإحتمالات المطلوبة

نفرض أن المتغير X يشير الى عدد الوحدات المعيبة في العينة

A. من أجل إيجاد الإحتمال التالي $p(X \leq 3)$ (إحتمال أن يكون عدد الوحدات المعيبة في العينة 3 وحدات على الأكثر) نقوم بإستخدام جدول التوزيع الثنائي

حيث أن جدول التوزيع الثنائي مبني على الصيغة التراكمية التالية

$$p(X \leq x) = \sum_{r=0}^{x} p^r \, (1-p)^{n-r}$$

فيكون p(X≤3) هي العدد في جداول التوزيع الثنائي الواقعة في فئة n=4 وفي سطر x=3 والعمود p=0.2، وعليه يكون $p(X \leq x)$ يساوي 0.9984 كما يتضح من الجدول أدناه.

Tables of the Binomial Cumulative Distribution

The table below gives the probability of obtaining at most x successes in n independent trials, each of which has a probability p of success. That is, if X denotes the number of successes, the table shows

$$P(X \le x) = \sum_{r=0}^{x} C_r^n p^r (1-p)^{n-r}$$

p=		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
n= 2	x= 0	0.9801	0.9604	0.9409	0.9216	0.9025	0.8836	0.8649	0.8464	0.8281	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9999	0.9996	0.9991	0.9984	0.9975	0.9964	0.9951	0.9936	0.9919	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
n= 3	x= 0	0.9703	0.9412	0.9127	0.8847	0.8574	0.8306	0.8044	0.7787	0.7536	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9997	0.9988	0.9974	0.9953	0.9928	0.9896	0.9860	0.9818	0.9772	0.9720	0.9393	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
n= 4	x= 0	0.9606	0.9224	0.8853	0.8493	0.8145	0.7807	0.7481	0.7164	0.6857	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9994	0.9977	0.9948	0.9909	0.9860	0.9801	0.9733	0.9656	0.9570	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9973	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
n= 5	x= 0	0.9510	0.9039	0.8587	0.8154	0.7738	0.7339	0.6957	0.6591	0.6240	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.9990	0.9962	0.9915	0.9852	0.9774	0.9681	0.9575	0.9456	0.9326	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9988	0.9980	0.9969	0.9955	0.9937	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

وبالتالي فإن إحتمال وجود 3 وحدات معيبة على الأكثر سيكون 99.84%.

B. من أجل إيجاد الإحتمال التالي $p(X = 3)$ (إحتمال أن يكون عدد الوحدات المعيبة في العينة 3 بالضبط) نقوم بإستخدام جدول التوزيع الثنائي

حيث أن جدول التوزيع الثنائي مبني على الصيغة التراكمية التالية

$$p(X \le x) = \sum_{r=0}^{x} p^r \, (1-p)^{n-r}$$

فيمكن إيجاد الإحتمال المطلوب كما يلي

$$p(X = 3) = \; p(X \le 3) - p(X < 3)$$

$$p(X = 3) = \; p(X \le 3) - p(X \le 2)$$

وحيث ان $p(X \le 3)$ هي العدد في جداول التوزيع الثنائي الواقعة في فئة n=4 وفي سطر x=3 والعمود p=0.2 ، وحيث أن $p(X \le 2)$ هي العدد في جداول التوزيع الثنائي الواقعة في فئة n=4 وفي سطر x=2 والعمود p=0.2 (القيمة التي تسبقها في نفس العمود)، فنقوم بطرح القيمتين للحصول على الإحتمالية المطلوبة.

Tables of the Binomial Cumulative Distribution

The table below gives the probability of obtaining at most x successes in n independent trials, each of which has a probability p of success. That is, if X denotes the number of successes, the table shows

$$P(X \leq x) = \sum_{r=0}^{x} C_r^n p^r (1-p)^{n-r}$$

$p=$		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$n=2$	$x=0$	0.9801	0.9604	0.9409	0.9216	0.9025	0.8836	0.8649	0.8464	0.8281	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9999	0.9996	0.9991	0.9984	0.9975	0.9964	0.9951	0.9936	0.9919	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=3$	$x=0$	0.9703	0.9412	0.9127	0.8847	0.8574	0.8306	0.8044	0.7787	0.7536	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9997	0.9988	0.9974	0.9953	0.9928	0.9896	0.9860	0.9818	0.9772	0.9720	0.9393	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=4$	$x=0$	0.9606	0.9224	0.8853	0.8493	0.8145	0.7807	0.7481	0.7164	0.6857	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9994	0.9977	0.9948	0.9909	0.9860	0.9801	0.9733	0.9656	0.9570	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9973	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=5$	$x=0$	0.9510	0.9039	0.8587	0.8154	0.7738	0.7339	0.6957	0.6591	0.6240	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.9990	0.9962	0.9915	0.9852	0.9774	0.9681	0.9575	0.9456	0.9326	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9988	0.9980	0.9969	0.9955	0.9937	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

كما يظهر من الجدول أن

$$p(X \leq 3) = 0.9984$$

$$p(X \leq 2) = 0.9728$$

فنجد ان

$$p(X = 3) = 0.9984 - 0.9728 = 0.0256$$

والذي يعني أن إحتمالية أن يكون عدد الوحدات المعيبة هو 3 وحدات في عينة مكونة من 4 وحدات يساوي 2.5%.

C. من أجل إيجاد الإحتمال التالي $p(X \geq 2)$ (إحتمال أن يكون هناك رقيقتان معيبتان على الأقل) بإستخدام جدول التوزيع الثنائي والإستفادة من قانون إحتمال الحدث المتمم

$$p(A) = 1 - p(A')$$

فيكون لدينا $p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(X \leq 1)$

فنقوم بإيجاد $p(X \leq 1)$ من الجدول وهي الإحتمالية الواقعة في تقاطع صف x=1 في فئة n=4 وعمود p=0.2 كما يلي

Tables of the Binomial Cumulative Distribution

The table below gives the probability of obtaining at most x successes in n independent trials, each of which has a probability p of success. That is, if X denotes the number of successes, the table shows

$$P(X \le x) = \sum_{r=0}^{x} C_r^n p^r (1-p)^{n-r}$$

$p=$		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$n=2$	$x=0$	0.9801	0.9604	0.9409	0.9216	0.9025	0.8836	0.8649	0.8464	0.8281	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9999	0.9996	0.9991	0.9984	0.9975	0.9964	0.9951	0.9936	0.9919	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=3$	$x=0$	0.9703	0.9412	0.9127	0.8847	0.8574	0.8306	0.8044	0.7787	0.7536	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9997	0.9988	0.9974	0.9953	0.9928	0.9896	0.9860	0.9818	0.9772	0.9720	0.9393	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=4$	$x=0$	0.9606	0.9224	0.8853	0.8493	0.8145	0.7807	0.7481	0.7164	0.6857	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9994	0.9977	0.9948	0.9909	0.9860	0.9801	0.9733	0.9656	0.9570	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9973	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=5$	$x=0$	0.9510	0.9039	0.8587	0.8154	0.7738	0.7339	0.6957	0.6591	0.6240	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.9990	0.9962	0.9915	0.9852	0.9774	0.9681	0.9575	0.9456	0.9326	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9988	0.9980	0.9969	0.9955	0.9937	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

ثم نقوم بطرح تلك القيمة من 1 كما يلي

$$p(X \ge 2) = 1 - 0.8192 = 0.1808$$

وعليه تكون إحتمالية ان تحتوي العينة على وحدتين معيبتين على الأقل هي تقريباً 18%.

ثالثاً: توزيع بواسون Poisson Distribution

في نظرية الاحتمالات والإحصاءات، توزيع بواسون هو توزيع احتمالي منفصل أو متقطع يعبر عن احتمال حدوث عدد معين من الأحداث في فترة زمنية أو مكانية ثابتة إذا حدثت هذه الأحداث بمتوسط ثابت ومعروف وبشكل مستقل عن وقت حدوث الحدث الأخير. فمثلاً في مجال التمويل ، يمكن استخدام توزيع بواسون في نمذجة وصول أوامر الشراء أو البيع الجديدة التي تم إدخالها في السوق أو الوصول المتوقع للأوامر في أماكن تداول محددة. توزيع بواسون مفيدة جدًا لأجهزة توجيه الطلبات الذكية والتداول الحسابي. كما أن كثيراً من الظواهر مثل عدد الواصلين الى طوارئ المستشفيات ، وعدد العملاء الواصلين الى أحد المطاعم أو الأسواق ، وعدد المكالمات التي يتم استقبالها على جهاز هاتف وغيرها.وقد سُمي هذا التوزيع على اسم عالم الرياضيات الفرنسي سيميون دينيس بواسون.

دالة الكثافة الإحتمالية تُعطى بالصيغة التالية

$$p(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, x = 0,1,2, \dots$$

وتكون دالة التوزيع الإحتمالي (دالة الكثافة الإحتمالية التراكمية CDF) هي

$$p(X \leq x) = \sum_{x} \frac{\lambda^{x}}{x!}\, e^{-\lambda}$$

حيث

e   :هو عدد أويلر x (e = 2.71828...)
X   : هو عدد مرات حدوث الحدث
$x!$: مضروب x

λ : هو القيمة المتوقعة ل X وهو يساوي التباين أيضاً

و يكون التوقع للمتغير X الذي يتبع توزيع بواسون كما يلي

$$\boldsymbol{E(X)} = \sum_{x} x\, p(x) = \sum_{x} x\, \frac{\lambda^{x}}{x!}\, e^{-\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$$

ويكون التباين والإنحراف المعياري كما يلي

$$\boldsymbol{V(X)} = E(X^2) - \lambda^2$$

$$\boldsymbol{V(X)} = \boldsymbol{\lambda}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\boldsymbol{\lambda}}$$

ويتميز هذا التوزيع بأنه توقعه يساوي التباين.

مثال 4

لنفترض أن مطعم الوجبات السريعة يمكن أن يتوقع عميلين كل 3 دقائق ، في المتوسط. ففي غضون 9 دقائق، أوجد ما يلي

A. ما هو احتمال دخول 7 زبائن على الأكثر؟
B. ما هو احتمال دخول 8 زبائن بالضبط؟
C. ما هو احتمال دخول أربعة زبائن على الأقل؟

الحل

يمكن بعد تحديد معدل حدوث الحدث λ (التي تمثل عدد العملاء في غضون 9 دقائق) إستخدام جداول توزيع بواسون.

حيث ان المطعم يتوقع عميلين كل 3 دقائق، فيكون معدل الزبائن في غضون 9 دقائق هو 6

$$\lambda = 6$$

A. لنفرض أن المتغير Xهو عدد الزبائن فيكون المطلوب الأول هو إيجاد

$$p(X \leq 7) = \sum_{x=0}^{7} \frac{6^x}{x!} e^{-6}$$

وحيث ان الإحتمالية المطلوبة تنسجم مع طريقة إعداد جدول التوزيع فتكون الإحتمالية المطلوبة

Tables of the Poisson Cumulative Distribution

The table below gives the probability of that a Poisson random variable X with mean = λ is less than or equal to x. That is, the table gives

$$P(X \leq x) = \sum_{r=0}^{x} \lambda^r \frac{e^{-\lambda}}{r!}$$

λ=	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
x= 0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.3012	0.2466	0.2019	0.1653
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358	0.6626	0.5918	0.5249	0.4628
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197	0.8795	0.8335	0.7834	0.7306
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810	0.9662	0.9463	0.9212	0.8913
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963	0.9923	0.9857	0.9763	0.9636
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9985	0.9968	0.9940	0.9896
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9974
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
λ=	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.5	5.0	5.5
x= 0	0.1353	0.1108	0.0907	0.0743	0.0608	0.0498	0.0408	0.0334	0.0273	0.0224	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041

λ=	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	11.0	10.0	12.0	14.0	15.0
x= 0	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005	0.0002	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
2	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028	0.0012	0.0028	0.0005	0.0001	0.0000
3	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103	0.0049	0.0103	0.0023	0.0005	0.0002
4	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293	0.0151	0.0293	0.0076	0.0018	0.0009
5	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671	0.0375	0.0671	0.0203	0.0055	0.0028
6	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301	0.0786	0.1301	0.0458	0.0142	0.0076
7	$\boxed{0.7440}$	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202	0.1432	0.2202	0.0895	0.0316	0.0180
8	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328	0.2320	0.3328	0.1550	0.0621	0.0374
9	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579	0.3405	0.4579	0.2424	0.1094	0.0699
10	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830	0.4599	0.5830	0.3472	0.1757	0.1185
11	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968	0.5793	0.6968	0.4616	0.2600	0.1848
12	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916	0.6887	0.7916	0.5760	0.3585	0.2676
13	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645	0.7813	0.8645	0.6815	0.4644	0.3632
14	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165	0.8540	0.9165	0.7720	0.5704	0.4657
15	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513	0.9074	0.9513	0.8444	0.6694	0.5681
16	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730	0.9441	0.9730	0.8987	0.7559	0.6641
17	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857	0.9678	0.9857	0.9370	0.8272	0.7489
18	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928	0.9823	0.9928	0.9626	0.8826	0.8195
19	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965	0.9907	0.9965	0.9787	0.9235	0.8752
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984	0.9953	0.9984	0.9884	0.9521	0.9170
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9977	0.9993	0.9939	0.9712	0.9469
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9990	0.9997	0.9970	0.9833	0.9673
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9999	0.9985	0.9907	0.9805
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	1.0000	0.9993	0.9950	0.9888
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	0.9997	0.9974	0.9938
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9967

وتكون الإحتمالية المطلوبة هي العدد الواقع في تقاطع x=7 وλ=6 والتي تظهر في الشكل أعلاه 0.7440 وعليه فإحتمال دخول 7 زبائن على الأكثر في غضون 9 دقائق ستكون 74%.

B. المطلوب الثاني $p(X = 8) = p(X \leq 8) - p(X \leq 7)$

وعليه فنوجد القيمة الواقعة في تقاطع x=8 وλ=6 (باللون الأحمر) ونطرح منها القيمة التي قبلها في نفس العمود (المشار اليها بالسهم الأزرق)

λ=	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	11.0	10.0	12.0	14.0	15.0
x= 0	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005	0.0002	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
2	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028	0.0012	0.0028	0.0005	0.0001	0.0000
3	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103	0.0049	0.0103	0.0023	0.0005	0.0002
4	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293	0.0151	0.0293	0.0076	0.0018	0.0009
5	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671	0.0375	0.0671	0.0203	0.0055	0.0028
6	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301	0.0786	0.1301	0.0458	0.0142	0.0076
7	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202	0.1432	0.2202	0.0895	0.0316	0.0180
8	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328	0.2320	0.3328	0.1550	0.0621	0.0374
9	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579	0.3405	0.4579	0.2424	0.1094	0.0699
10	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830	0.4599	0.5830	0.3472	0.1757	0.1185
11	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968	0.5793	0.6968	0.4616	0.2600	0.1848
12	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916	0.6887	0.7916	0.5760	0.3585	0.2676
13	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645	0.7813	0.8645	0.6815	0.4644	0.3632
14	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165	0.8540	0.9165	0.7720	0.5704	0.4657
15	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513	0.9074	0.9513	0.8444	0.6694	0.5681
16	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730	0.9441	0.9730	0.8987	0.7559	0.6641
17	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857	0.9678	0.9857	0.9370	0.8272	0.7489
18	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928	0.9823	0.9928	0.9626	0.8826	0.8195
19	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965	0.9907	0.9965	0.9787	0.9235	0.8752
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984	0.9953	0.9984	0.9884	0.9521	0.9170
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9977	0.9993	0.9939	0.9712	0.9469
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9990	0.9997	0.9970	0.9833	0.9673
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9999	0.9985	0.9907	0.9805
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	1.0000	0.9993	0.9950	0.9888
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	0.9997	0.9974	0.9938
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9967
27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9983
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9991

$$p(X = 8) = p(X \leq 8) - p(X \leq 7) = 0.8472 - 0.7440 = 0.1032$$

واحتمال دخول 8 زبائن بالضبط في غضون 9 دقائق ستكون 10%.

C. المطلوب الثالث $p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3)$

نقوم بإيجاد قيمة الإحتمال $p(X \leq 3)$ من جدول توزيع بواسون كما يلي

λ=	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	11.0	10.0	12.0	14.0	15.0
x= 0	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005	0.0002	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
2	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028	0.0012	0.0028	0.0005	0.0001	0.0000
3	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103	0.0049	0.0103	0.0023	0.0005	0.0002
4	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293	0.0151	0.0293	0.0076	0.0018	0.0009
5	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671	0.0375	0.0671	0.0203	0.0055	0.0028
6	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301	0.0786	0.1301	0.0458	0.0142	0.0076
7	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202	0.1432	0.2202	0.0895	0.0316	0.0180
8	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328	0.2320	0.3328	0.1550	0.0621	0.0374
9	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579	0.3405	0.4579	0.2424	0.1094	0.0699
10	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830	0.4599	0.5830	0.3472	0.1757	0.1185
11	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968	0.5793	0.6968	0.4616	0.2600	0.1848
12	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916	0.6887	0.7916	0.5760	0.3585	0.2676
13	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645	0.7813	0.8645	0.6815	0.4644	0.3632
14	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165	0.8540	0.9165	0.7720	0.5704	0.4657
15	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513	0.9074	0.9513	0.8444	0.6694	0.5681
16	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730	0.9441	0.9730	0.8987	0.7559	0.6641
17	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857	0.9678	0.9857	0.9370	0.8272	0.7489
18	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928	0.9823	0.9928	0.9626	0.8826	0.8195
19	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965	0.9907	0.9965	0.9787	0.9235	0.8752
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984	0.9953	0.9984	0.9884	0.9521	0.9170
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9977	0.9993	0.9939	0.9712	0.9469
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9990	0.9997	0.9970	0.9833	0.9673
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9999	0.9985	0.9907	0.9805
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	1.0000	0.9993	0.9950	0.9888
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	0.9997	0.9974	0.9938
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9967
27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9983
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9991

$$p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3) = 1 - 0.1512 = 0.8488$$

و احتمال دخول 4 زبائن على الأقل في غضون 9 دقائق ستكون 85%.

بعض أنواع التوزيعات الإحتمالية المتصلة (المستمرة)

Some Continuous Probability Distributions

أولاً: التوزيع الأسي Exponential Distribution

في نظرية الاحتمالات والإحصاء، التوزيع الأسي توزيع احتمالي مستمر اشتق اسمه من الدالة الأسية. ويستعمل هذا التوزيع في تقدير الفترات الزمنية بين وقوع الأحداث.

عادة ما يستخدم التوزيع الأسي في مسائل متعلقة بقياس الزمن. من ذلك مدة خدمة شباك البريد، مدة المكالمة الهاتفية، مدة تفريغ باخرة الشحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة. في العلوم الدقيقة يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة الذرات المشعة قبل أن تتفكك.

يتم إعطاء دالة الكثافة الاحتمالية بواسطة

$$f(X) = f(x) = \begin{cases} \mu\, e^{-\mu x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

حيث X هو المتغير العشوائي، و μ هو متوسط عدد الوحدات التي يمكن لمرفق الخدمة التعامل معها في فترة زمنية محددة)، و العدد e هو 2.718 (قاعدة اللوغاريتم الطبيعي).

ويكون التوقع للمتغير X كما يلي

$$E(X) = \frac{1}{\mu}$$

ويكون التباين والإنحراف المعياري كما يلي

$$V(X) = \frac{1}{\mu^2}, \sigma = \frac{1}{\mu}$$

وتكون دالة التوزيع الإحتمالي (دالة الكثافة الإحتمالية التراكمية (CDF) كما يلي

$$p(X \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$$

مثال 5

تقوم ورشة المجد للسيارات بعمل صيانة للسيارات. يمكن للميكانيكي القيام بالصيانة الدورية للسيارات بمعدل حوالي ثلاث سيارات في الساعة، ويتبع وقت الخدمة التوزيع الأسي. أوجد ما يلي

A. احتمال أن يكون الوقت اللازم لصيانة السيارة التالية هو نصف ساعة أو أقل.

B. احتمال أن يكون الوقت اللازم لصيانة السيارة التالية هو ثلث ساعة أو أقل.

C. احتمال أن يكون الوقت اللازم لصيانة السيارة التالية هو ثلثي ساعة أو أقل.

الحل

A. سنقوم بإستخدام دالة التوزيع الإحتمالية التراكمية CDF للتوزيع الأسي وهي

$$p(X \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$$

حيث t=0.5 (نصف ساعة) ، $\mu = 3$ هو متوسط عدد السيارات التي يمكن خدمتها في الساعة وعليه

$$p(X \leq 0.5) = 1 - e^{-3*0.5} = 1 - e^{-1.5} = 1 - 0.2231 = 0.7769$$

وعليه فإن هناك 78% إحتمالية أن يكون الوقت اللازم لعمل الصيانة الدورية للسيارة التالية هو نصف ساعة أو أقل وهناك 22% ان يكون أطول من ذلك.

B. المطلوب هو إيجاد الإحتمالية التالية

$$p(X \leq \tfrac{1}{3}) = 1 - e^{-3*(\frac{1}{3})} = 1 - e^{-1} = 1 - 0.3679 = 0.6321$$

C. المطلوب هو إيجاد الإحتمالية التالية

$$p(X \leq \tfrac{2}{3}) = 1 - e^{-3*(\frac{2}{3})} = 1 - e^{-2} = 1 - 0.1353 = 0.8647$$

ثانياً: التوزيع الطبيعي Normal Distribution

التوزيع الطبيعي هو واحد من التوزيعات الاحتمالية المستمرة الأكثر شيوعاً وإستخداماً وخاصةً في عمليات صناعة القرارات. كما يُعتبر من القواعد الأساسية في علوم ضبط الجودة ومنهجية ستة سيجما (6σ) وغيرها. كما يُستخدم التوزيع الطبيعي في تمثيل عدد كبير من الظواهر والعمليات في حياتنا (على سبيل المثال ، وزن صناديق حبوب الإفطار من رقائق الذرة، أوزان المنتجات المتطابقة، اطوال الأفراد وأوزان حديثي الولادة أو رواتب العاملين في إحدى الشركات الكبرى وغيرها). يعتمد كل توزيع طبيعي على المتوسط الحسابي (Mean) μ والإنحراف المعياري (Standard Deviation) σ.

يتم إعطاء دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع بواسطة الصيغة التالية

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$$

يتم تحديد التوزيع الطبيعي بشكلٍ تام عندما يتم تحديد المتوسط الحسابي (Mean) μ، والإنحراف المعياري (Standard Deviation) σ. يوضح الشكل 3.1 عدة توزيعات طبيعية مختلفة بنفس الانحراف المعياري ومتوسطات حسابية مختلفة. كما هو موضح ، فإن القيم المختلفة ل μ ستغير موقع مركز التوزيع الطبيعي، بينما الشكل العام للتوزيع لا يزال كما هو. من ناحية أخرى ، عندما يكون الانحراف المعياري مختلفاً ، فإن المنحنى الطبيعي إما يتسطح أو يصبح أكثر حدة. ويظهر ذلك في الشكل 3.2 . عندما يصبح الانحراف المعياري ، σ ، أصغر ، يصبح التوزيع الطبيعي أكثر حدة. عندما يصبح الانحراف المعياري أكبر، يميل التوزيع الطبيعي إلى التسطيح أو يصبح أكثر سعة.

وتكون دالة التوزيع الإحتمالي التراكمية CDF كما في الصيغة التالية

$$F(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

و هي المساحة تحت المنحنى من $-\infty$ حتى القيمة x.

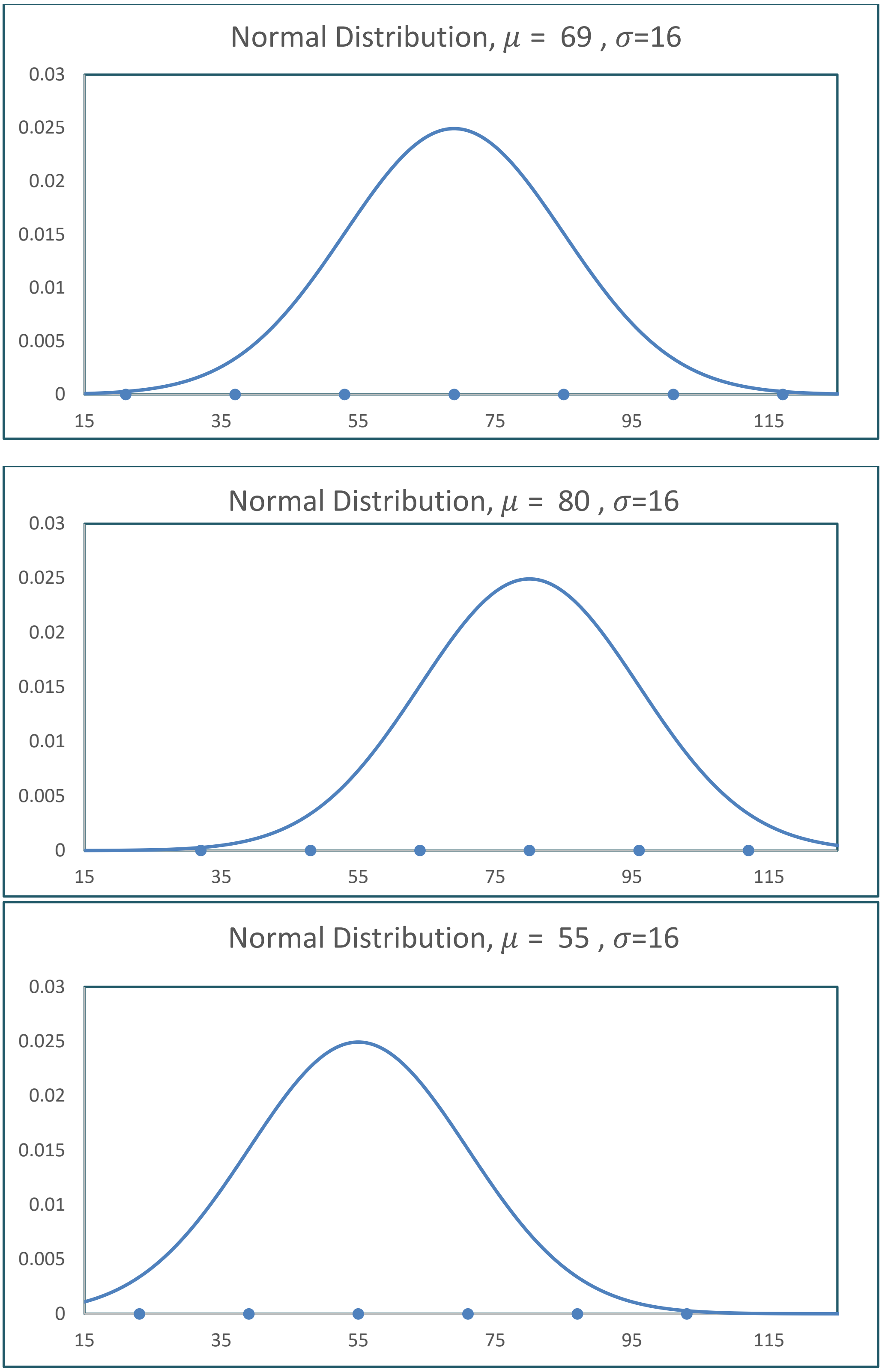
ويكون التوقع

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \mu$$

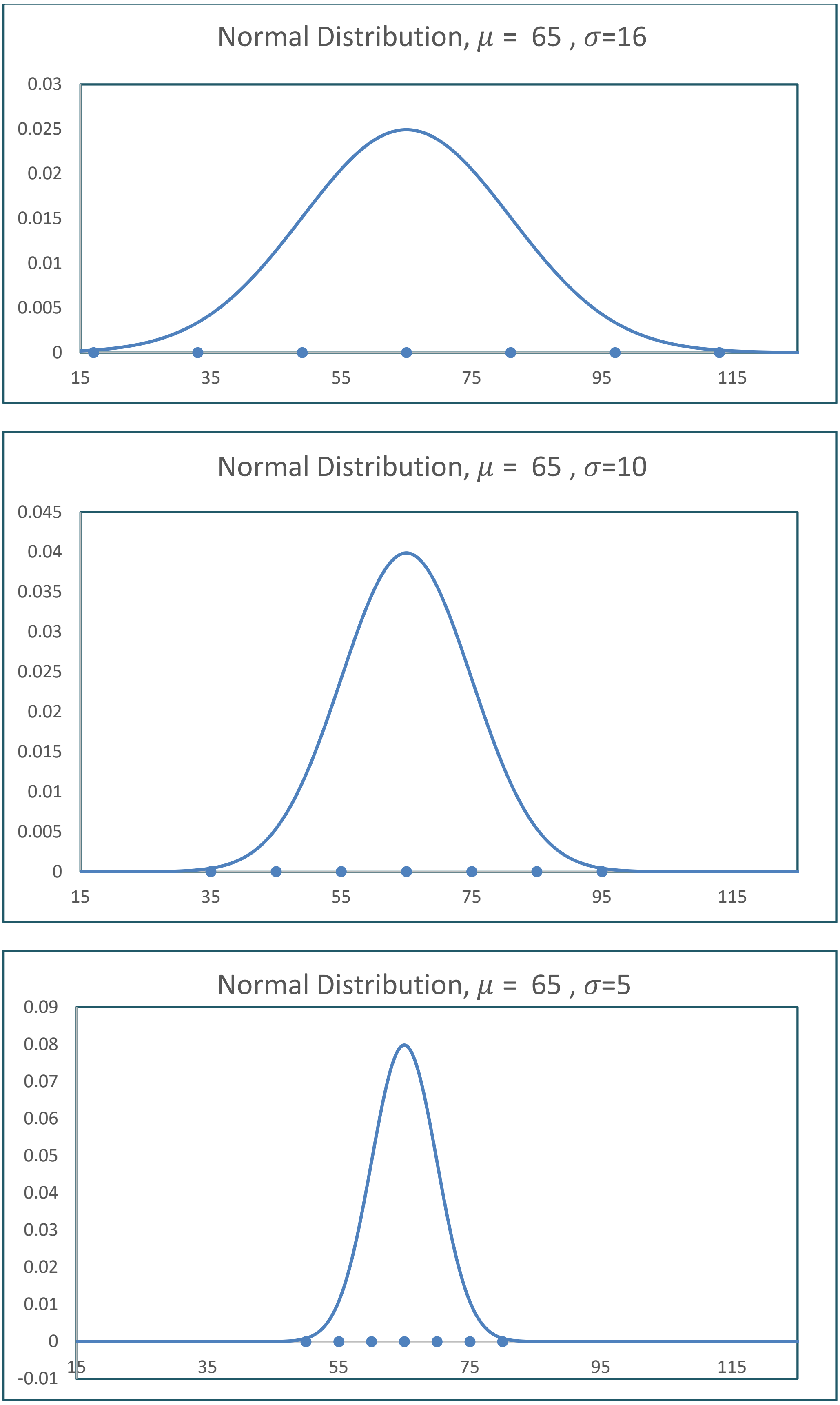
ويكون التباين كما يلي

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \sigma^2$$

و الإنحراف المعياري يكون σ ونقول ان المتغير X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وبإنحراف معياري σ ويُعبر عنه رمزياً كالتالي $X \sim N(\mu, \sigma)$



شكل 3.1 شكل منحنى التوزيع الطبيعي لقيم متوسط مختلفة مع ثبات الإنحراف المعياري



شكل 3.2 شكل منحنى التوزيع الطبيعي لقيم إنحراف معياري مختلفة مع ثبات المتوسط

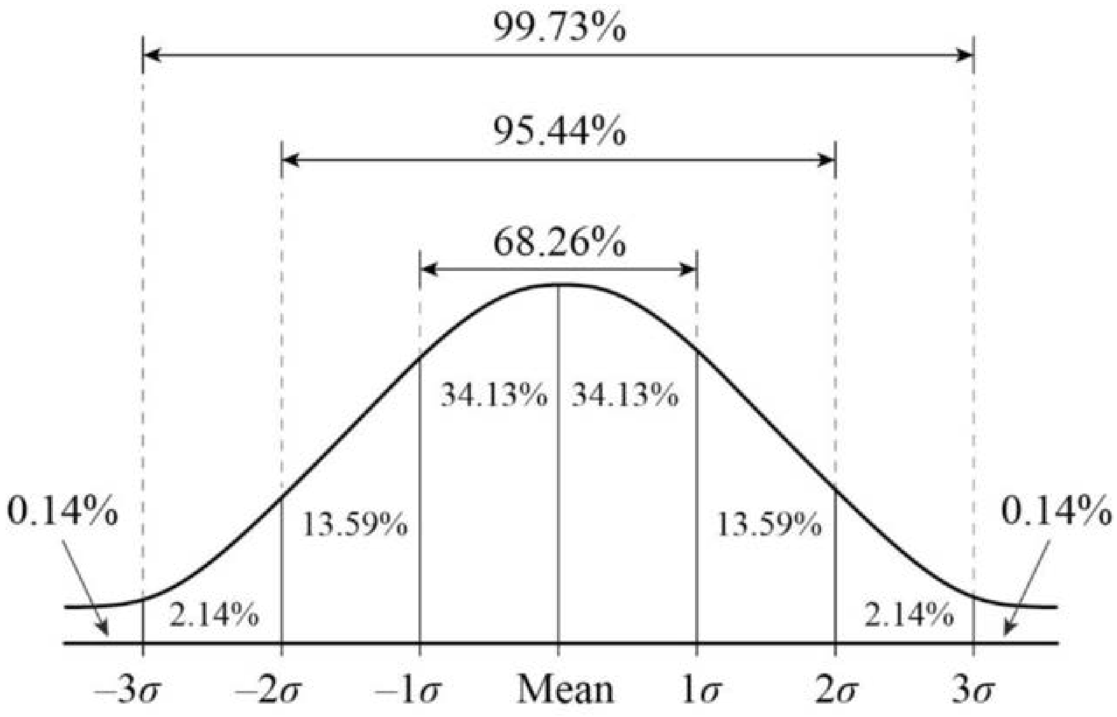
وبناءً على تماثل البيانات التي تخضع للتوزيع الطبيعي، نستطيع ان نقول

أن 68.26% من البيانات تقع على نطاق 1σ (إنحراف معياري واحد) من المتوسط ، و

أن 95.44% من البيانات تقع على نطاق 2σ (ضعف الإنحراف المعياري) من المتوسط، و

أن 99.73% من البيانات تقع على نطاق 3σ (ثلاثة أمثال الإنحراف المعياري) من المتوسط

كما يظهر في الشكل 3.3 أدناه.



شكل 3.3 : تمثيل توزيع البيانات في منحنى التوزيع الطبيعي

التوزيع الطبيعي القياسي Standard Normal Distribution

عندما نوجد الاحتمالات للتوزيع الطبيعي، من الافضل رسم المنحنى الطبيعي وتضليل المنطقة المقابلة للاحتمال المطلوب. كما يمكن استخدام جدول التوزيع الطبيعي حينها لمعرفه الاحتمالات.

تحويل التوزيع الطبيعي الى التوزيع الطبيعي القياسي

قبل أن نستطيع إستخدام جدول التوزيع الطبيعي لإيجاد الإحتمالات بناءً على قيم المتغير X الذي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ و إنحراف معياري σ ، لا بد أولاً من تحويل ذلك المتغير الى المتغير Z الذي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي.

والتوزيع الطبيعي القياسي هو حالة خاصة من التوزيع الطبيعي ولكن لديه متوسط صفر و انحراف المعياري يساوي الواحد الصحيح. وقد تم اعداد جميع الجداول الطبيعية للتعامل مع المتغيرات العشوائية مع ال μ=0 وال σ=1. بدون التوزيع الطبيعي القياسي ستكون هناك حاجه الى جدول مختلف لكل زوج من قيم μ وσ. ويُسمى المتغير العشوائي القياسي الجديد Z.

ونقول أن $Z \sim N(0,1)$، ويتم احتساب قيمه Z لأي توزيع طبيعي من خلال التحويل التالي:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

حيث أن

X= قيمه المتغير العشوائي الذي نريد قياسه.

μ= متوسط التوزيع.

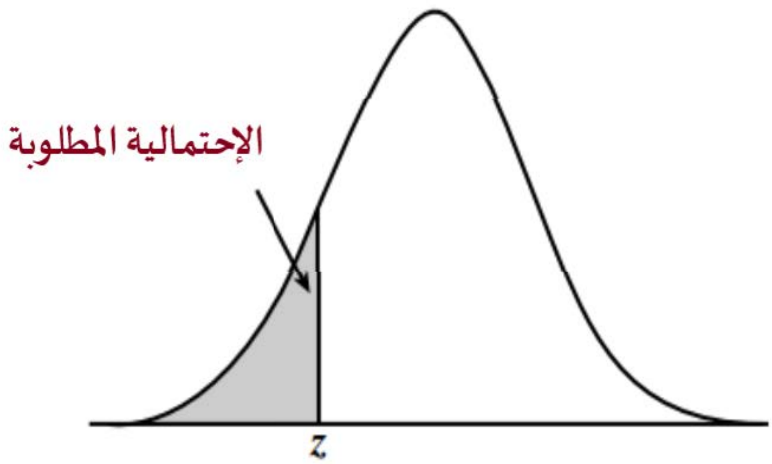
σ= الانحراف المعياري للتوزيع.

Z= عدد الانحراف المعياري من قيمه المتغير العشوائي الى المتوسط.

هذا المتغير Z تكون له دالة التوزيع الإحتمالي التالية

$$F(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}z^2} dx = \phi(z)$$

ويتم تمثيلها بيانياً كما يلي

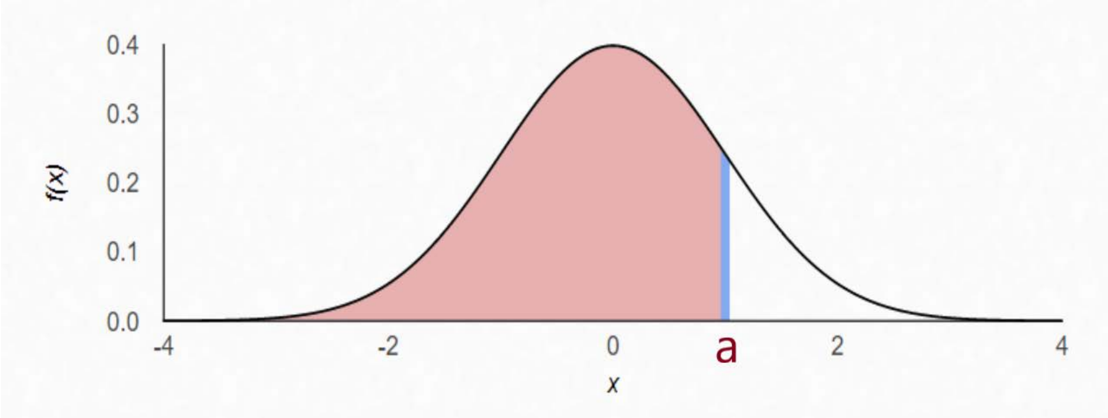


شكل 3.4 : المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي

إستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي

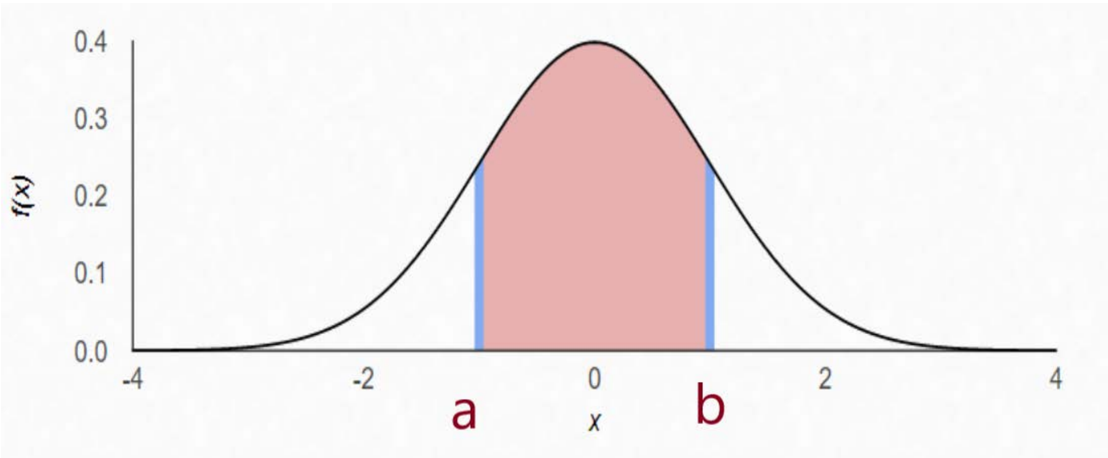
هناك طرق مختلفة للتعامل مع جداول التوزيع بحسب طريقة بناء كل جدول. بالنسبة للجدول الذي سيتم إستخدامه هنا (الذي يعتمد على إيجاد الإحتمالية $p(Z \leq z)$ على أساس المساحة تحت المنحني الطبيعي من $-\infty$ حتى z) كما في الشكل 3.4. وعليه سيكون لدينا ثلاث حالات:

الحالة الأولى: المطلوب إيجاد $p(Z \leq a)$



وفي هذه الحالة يتم قراء الإحتمال من الجدول مباشرة وهي القيمة الواقعة في تقاطع عمود قيمة z مع عمود المنزلة العشرية الثانية.

الحالة الثانية: المطلوب إيجاد $p(a \leq Z \leq b)$

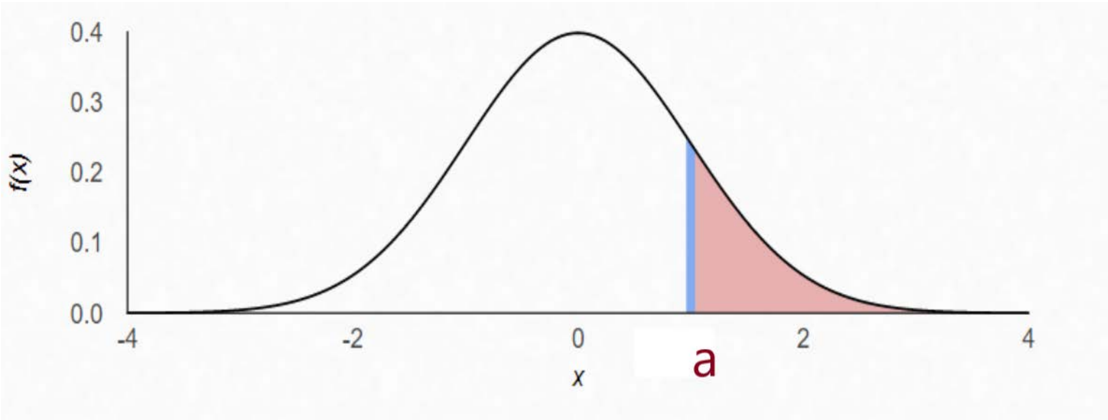


ويتم في هذه الحالة إستخدام الصيغة التالية

$$p(a \leq Z \leq b) = p(Z \leq b) - p(Z \leq a)$$

ويتم قراءة الإحتمالات مباشرةً من الجدول.

الحالة الثالثة: المطلوب إيجاد $\boldsymbol{p}(\mathbf{Z} \geq \mathbf{a})$



في هذه الحالة يتم الإستفادة من قانون المتمم ونوجد الإحتمالية بالصيغة التالية:

$$p(\mathrm{Z} \geq \mathrm{a}) = 1 - p(\mathrm{Z} \leq \mathrm{a})$$

ونقوم بقراءة الإحتمالية المطلوبة من جدول التوزيع الطبيعي وطرحها من 1 للحصول على الإحتمال المطلوب.

مثال 6

إذا كان متوسط درجة الذكاء IQ ‏(μ=100) والإنحراف المعياري (σ=15)، فأوجد الإحتماليات التالية

A. إحتمال أن تكون درجة ذكاء شخص يتم إختياره عشوائيا هي أقل من 130.

B. إحتمال أن تكون درجة ذكاء شخص يتم إختياره عشوائيا هي أكبر من 125.

C. إحتمال أن تكون درجة ذكاء شخص يتم إختياره عشوائيا بين 120 و 130.

الحل

نفرض أن X درجة ذكاء الشخص

A. فيكون المطلوب

$$p(X < 130) = p(X \leq 130)$$

وذلك حيث ان $p(X = 130) = 0$

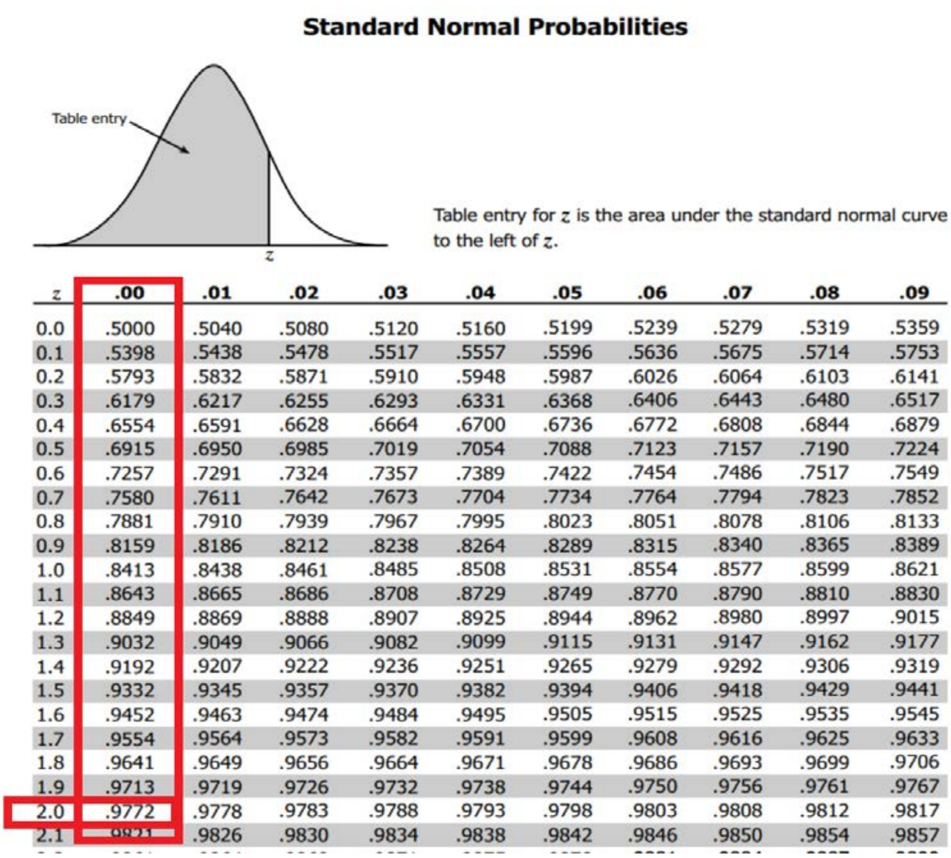
نقوم بتحويل المتغير $\boldsymbol{X \sim N(\mu = 100, \sigma = 15)}$ الى المتغير $\boldsymbol{Z \sim N(\mu = 0, \sigma = 1)}$ بإستخدام العلاقة

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

فيكون لدينا

$$p(\frac{X - 100}{15} \leq \frac{130 - 100}{15}) \leftrightarrow \mathrm{p}(\mathrm{Z} \leq 2.00)$$

نوجد الإحتمالية المطلوبة من جدول التوزيع والتي تقع في تقاطع صف z=2 وعمود 0.00 كما في الشكل التالي



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857

شكل 3.5: إحتمالية أن يكون معدل الذكاء 130 على الأكثر

$$\mathrm{p}(\mathrm{Z} \leq 2.00) = 0.9772$$

ويكون إحتمال ان يكون معدل ذكاء الشخص الذي تم إختياره عشوائياً على الأغلب 130 هو 97.72%.

B. المطلوب هو

$$p(X>125) = p(X \geq 125)$$

وبإستخدام قانون المتمم

$$p(X \geq 125) = 1 - p(X \leq 125)$$

وقبل إستخدام جدول التوزيع الطبيعي نقوم بتحويل X الى Z

$$p\left(\frac{X-100}{15} \geq \frac{125-100}{15}\right) = 1 - p\left(\frac{X-100}{15} \leq \frac{125-100}{15}\right)$$
$$= 1 - p(Z \leq 1.67) \ldots \ldots (*)$$

نقوم بإستخدام جدول التوزيع لإيجاد $p(Z \leq 1.67)$

Standard Normal Probabilities

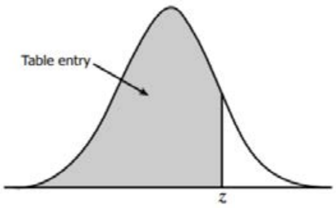


Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857

فتكون الإحتمالية المطلوبة هو العدد الواقع في تقاطع صف z=1.6 والعمود 0.07 وهي 0.9525. نعوض في (*) فنجد

$$p(X \geq 125) = 1 - 0.9525 = 0.0475$$

وبالتالي فإن إحتمالية ان تكون درجة ذكاء الشخص الذي تم غختياره عشوائياً أعلى من 125 هي 4.75%.

C. المطلوب هو إيجاد $p(120 \leq X \leq 130)$

$$p(120 \le X \le 130) = p(X \le 130) - p(X \le 120)$$

$$= p(Z \le 2.00) - p(Z \le 1.33) \ldots\ldots (**)$$

نقوم بإيجاد الإحتمالات من جدول التوزيع الطبيعي ثم نعوض في (**)

حيث ان من (A) وجدنا ان $p(Z \le 2.00) = 0.9772$

نقوم بإيجاد $p(Z \le 1.33)$ من الجدول كالتالي

Standard Normal Probabilities

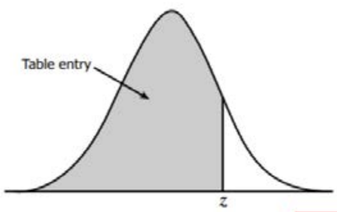


Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857

نوجد من الجدول العدد الواقع في تقاطع Z=1.3 والعمود 0.03 والتي ستكون 0.9082 ثم نقوم بالتعويض في (**) فنحصل على التالي

$$p(120 \le X \le 130) = p(Z \le 2.00) - p(Z \le 1.33) = 0.9772 - 0.9082$$
$$= 0.069$$

وعليه يمكن القول ان إحتمالية ان تكون درجة ذكاء الشخص الذي تم غختياره عشوائياً بين 120 و 130 هي 6.9%

الخاتمة

تم في هذا الفصل مناقشة مفهوم المتغير العشوائي بنوعيه المنفصل والمتصل مع تقديم امثلة عنهما. كما تمت مناقشة مفهوم التوزيع الإحتمالي ودراسة بعض أنواع التوزيعات الاحتمالية المنفصلة مثل (توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون) بعض أنواع التوزيعات الإحتمالية المتصلة (التوزيع الأسي والتوزيع الطبيعي). كما تم تقديم بعض التطبيقات التي تعتمد على تلك التوزيعات مع بيان أهميتها في إتخاذ القرارات المختلفة.

أسئلة

السؤال 1

في تجربة رمي قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات، إذا تم تحديد المتغير العشوائي X ليكون عدد الصور الظاهرة في الثلاث رميات، المطلوب

A. هل يُعتبر المتغير منفصلاً او متصلاً؟ ولماذا؟
B. قم بتطوير جدول التوزيع للمتغير X
C. هل يُعتبر التوزيع توزيعاً إحتمالاً؟ وضح
D. قم بإيجاد العدد المتوقع للصور ؟
E. قم بإيجاد التباين والإنحراف المعياري.
F. ما هي إحتمالية الحصول على صورتين على الأقل؟
G. ما هي إحتمالية الحصول على صورتين؟
H. ما هي إحتمالية الحصول على صورتين على الأكثر؟

السؤال 2

إذا كان المتغير العشوائي X له دالة الكثافة الإحتمالية التالية

$$f(X) = \begin{cases} 2x \quad , \quad for\ 0 \le x \le 1 \\ \quad 0, \quad otherwise \end{cases}$$

أوجد ما يلي:

A. القيمة المتوقعة للمتغير X
B. التباين والإنحراف المعياري للمتغير X

السؤال 3

دخل احمد إختباراً في مادة الطرق الكمية وكان هناك 10 أسئلة من أسئلة صواب وخطأ. لم يقم أحمد بالتحضير للإمتحان ويشعر بأنه غير مستعد لهذا الاختبار ويخمن الإجابة بشكل عشوائي لكل الأسئلة. اوجد الإحتمالات التالية:

A. احتمال إجابة أحمد على 7 أسئلة بالضبط بشكلٍ صحيح.
B. احتمال إجابة أحمد على 8 أسئلة صحيحة تماماً؟
C. احتمال إجابة أحمد على 10 أسئلة بصورة صحيحة بالضبط؟
D. احتمال إجابة أحمد على 6 أسئلة بصورة صحيحة على الأقل
E. احتمال إجابة أحمد على 5 أسئلة بصورة صحيحة على الأكثر

السؤال 4

في تجربة رمي قطعة نقود متوازنة 10 مرات أوجد الإحتمالات التالية:

A. احتمال الحصول على 7 صور بالضبط.
B. احتمال الحصول على 8 صور على الأقل.
C. احتمال عدم الحصول صور إطلاقاً.
D. احتمال الحصول على 6 صور على الأكثر.

السؤال 5

يعمل جاسم في قسم المبيعات في الشركة، تشير السجلات إلى أنه يقوم ببيع 70٪ من مكالمات المبيعات الخاصة به. إذا اتصل بأربعة عملاء محتملين، فأجد

A. احتمال أن يحقق 3 مبيعات بالضبط؟
B. احتمال أن يحقق 4 مبيعات بالضبط؟
C. إحتمال ان يحقق 3 مبيعات على الأقل؟

السؤال 6

يصل المرضى إلى غرفة الطوارئ في مستشفى حمد بمعدل 20 يوميا. أوجد ما يلي

A. احتمال وصول 15 مريضاً بالضبط في اليوم.

B. إحتمال أن يكون عدد المرضى الواصلين في يومٍ ما اكثر من 17 مريضاً ؟

C. إحتمال أن يكون عدد المرضى الواصلين في يومٍ ما أقل من 19 مريضاً ؟

السؤال 7

تعمل شركة الماجد في مجال المقاولات والإنشاءات. وتقوم حالياً ببناء مجموعة من الفلل للعملاء. ويُعتقد أن وقت البناء يتبع التوزيع الطبيعي. بحسب خبراء الشركة فإن متوسط إنهاء الفيلا الواحدة هو 120 يوماً والإنحراف المعياري هو 30 يوماً. وقد تم توقيع العقد مع احد العملاء وتم فيه تحديد مكافأة للشركة مقدارها 50 الف دولار إذا تم إنجاز العمل في فترة أقل من 110 أيام، وهناك غرامة تأخير إذا زادت مدة استكمال الفيلا عن 130 يوماً.

بناءً على ما سبق أوجد الإحتمالات التالية

A. إحتمال ان تتحصل الشركة على المكافأة المحددة ب 50 الف دولاراً

B. إحتمال ان تتحمل الشركة الغرامة المحددة ب 50 الف دولاراً

السؤال 8

يعمل جاسم مديراً للإنتاج في شركة الفواكه الطازجة، وقد قام تقدير أن متوسط بيع البرتقال هو 4700 والانحراف المعياري هو 500 برتقالة. والمبيعات تتبع التوزيع الطبيعي. والمطلوب إيجاد

A. احتمال أن تزيد مبيعات البرتقال عن 5500 برتقالة

B. احتمال أن تكون مبيعات البرتقال أقل من 4900 برتقالة

C. احتمال أن تكون مبيعات البرتقال بين 4300 و6000 برتقالة؟

السؤال 9

يتم توزيع الوقت اللازم لإكمال مشروع بناء فيلا بحسب التوزيع الطبيعي بمتوسط 60 أسبوعاً وانحرافا معياريا قدره 4 أسابيع. والمطلوب إيجاد

A. احتمال إنجاز المشروع في غضون 62 أسبوعا أو أقل؟

B. احتمال أن يستغرق المشروع وقتا أطول من 65 أسبوعا

C. احتمال أن يستغرق إستكمال المشروع وقتا يتراوح بين 60 و 66 أسبوعا

السؤال 10

سيتم تثبيت نظام كمبيوتري متكامل جديد في جميع أنحاء العالم لشركة دولية كبرى. وتمت الدعوة الى تقديم العطاءات بشأن هذا المشروع من الشركات المهتمة، وسيمنح العقد لأحد مقدمي العطاءات. كجزء من العروض المقدمة على هذا المشروع ، يجب على مقدمي العطاءات تحديد المدة التي سيستغرقها المشروع. سيكون هناك عقوبة كبيرة (مليون دولاراً) إذا تم إنهاء المشروع في وقتٍ متأخر عن المدة المحددة من قبل المقاول المحتمل. أحد المقاولين المحتملين قدر في عرضه أن متوسط الوقت اللازم لإكمال مشروع من هذا النوع هو 40 أسبوعاً مع انحراف معياري قدره 5 أسابيع. إذا علمت أن الوقت اللازم لإنجاز هذا المشروع يتوزع توزيعاً طبيعياً، أجب عما يلي.

A. إذا حدد المقاول تاريخ استحقاق هذا المشروع ب 40 أسبوعاً، فما هو احتمال أن يضطر هذا المقاول إلى دفع غرامة التأخير؟

B. إذا حدد تاريخ استحقاق هذا المشروع ب 43 أسبوعاً، فما هو احتمال أن يضطر المقاول إلى دفع غرامة ؟

c. إذا رغب مقدم العرض في تحديد تاريخ الاستحقاق في الاقتراح بحيث لا يكون هناك سوى فرصة بنسبة 5٪ للتأخر ، فما هو تاريخ الاستحقاق الذي يجب تحديده؟